Tema 5

17.– Una sucesión de variables aleatorias independientes $X_1, X_2, \dots, X_n$ tiene la siguiente ley de distribución:

X_n	$-na$	0	na
P	$1/2n^2$	$1-1/n^2$	$1/2n^2$

¿es aplicable el Teorema de Chebyshev?

1ª Condición: la cumple. Las variables son independientes.

2ª Condición: que la dispersión no supere un determinado valor ctes, que no dependa de las 'n' v.a.

· Calcularemos la varianza de una v.a, ya que con ésto me será suficiente → $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = a^2 - 0 = a^2$

$$E(X) = \sum_{n=1}^{3} x_i \, P[X = x_i] = -n.a \; 1/2n^2 + 0(1 - 1/n^2) + n.a \; 1/2n^2 = 0$$

$$E(X^2) = (-na)^2 \; 1/2n^2 + 0^2(1 - 1/n^2) + (na)^2 \; 1/2n^2 = a^2$$

Así, la segunda condición se cumple.

3ª Condición: que el nº de variables aleatorias sea suficientemente grande.

· En este caso no nos dicen nada acerca del nº de v.a. por lo que consideramos que es suficiente/ grande.

Ejemplo 8: TEMA 6.

$n = 100$

¿k?

$P[x \leq k] \geq 0'9$ $P[y > k] \geq 0'7$ ó $P[Y \leq k] < 0'3$.

"x" → nº de circuitos electrónicos defectuosos cuando el nº de circuitos defectuosos es del 1%.

"y" → nº de circuitos electrónicos defectuosos cuando el nº de circuitos defectuosos es del 4%.

Se trata de 1 distribución binomial.

v.a. $x \sim B(n=100, P=0'01)$

Probabilidad "P" de q. un circuito sea defectuoso es cte.

v.a. $x \sim B(n=100, P=0'04)$

$P[x \leq k] = P[x=0] + P[x=1] + \ldots + P[x=k] = 0'9.$

$P[Y \leq k] = P[Y=0] + P[Y=1] + \ldots + P[Y=k] < 0'3$

} En las Tablas

Podemos aproximar 1 binomial mediante una de Poisson:

$np = \lambda = 0'01 \times 100 = 1$

$np = \lambda = 0'04 \times 100 = 4$

v.a. $x \sim P(\lambda = 1)$

v.a. $y \sim P(\lambda = 4)$.

Pág. 7

$\lambda = 1$

$P[x=0]$ no llega a $0'9$ ⇒ le sumamos la $P[x=1]$, no llega a $0'9$ ⇒ sumamos $P[x=2]$, la suma pasa de $0'9$ ⇒ Ya hemos hallado el valor de 'k' ⇒ **k = 1**

1.

Ahora $\lambda = 4$

$P[y=0] + P[y=1] + P[y=2] + P[y=3] > 0'3 \Rightarrow$ $\boxed{k=2}$

Ejemplo 4:

v.a. X: nº de llamadas por minuto que se producen en esa centralita

* No es una distribución binomial pues puede haber + de 2 resultados ≠.

NECESARIO ¿Cumple las propiedades de Poisson?

1. Se producen en ≠ intervalos de tiempo. (En el ejem. o la llamada se da en 1 min. o en otro.)

2. El q. ocurra 1 suceso en un intervalo de tiempo es independiente de que ocurra en otro intervalo.

3. La probabilidad de q. ocurra 1 suceso es ≃ igual al tamaño del intervalo.

4. La probabilidad de que tenga lugar + de 1 suceso en una unidad de tiempo muy pequeña es nula.

Si las cumple. Estamos frente a un suceso de distribución de Poisson:

Se producen 300 llamadas/hora ; 5 llamadas por minuto.

v.a. $X \sim P(\lambda = 5)$

a) Probabilidad de que no pueda atender todas las llamadas:

$P[X > 12] = P[X \geq 13] = P[X=13] + P[X=14] + P[X=15] + \dots + \infty =$

$= 1 - P[X \leq 12] = \underline{0'0020}$

b) $P[x=1]=0'0337$

Ejemplo 5:

v.a. $x \sim$ Nº de piezas defectuosas en la 1ª planta.

v.a. $y \sim$ " " " " " 2ª ".

Necesario

Cada una de las unidades es o no defectuosa. → Binomial.

En cada experimento sólo hay 2 resultados posibles.

Que una unidad sea defectuosa o no no depende del resultado de la anterior.

La probabilidad de una unidad de ser defectuosa es cte.

V.a $x \sim B(n=?;\ P=?)$

V.a $y \sim B(n=?;\ P=?)$

$\frac{4^k}{k!} e^{-4} \rightarrow P(\lambda=4)$. → esperanza matemática: por término medio se producen 4 unid. defectuosas en la 1ª planta.

$\frac{6^k}{k!} e^{-6} \rightarrow P(\lambda=6)$.

$z = x + y$ z.= combinación lineal de dos v.a que siguen 1 distribución de Bi

$z \sim P(\lambda=\lambda_1+\lambda_2=10)$

$P[z \geq 8] = 1 - P[z \leq 7] = \underline{0'7798}$

Ejemplo 6:

Objetivo del comprador: doble

- 1º decidir si la prueba q. hacemos es válida pa' lo q. pretendemos. (prueba: obtener de cada lote 3 clips y ver si son defectuosos o no. → tiene 3 experimentos.)
- 2º Si no es válida, establecer 1 prueba q. sea válida.

El comprador pretende q. en cada lote comprado no haya + de 5 clips defectuosos.

Prueba: si en el lote hay 0 ó 1 chip defectuoso —> acepto el lote.
" " " " " 2 ó 3 " " —> no acepto el lote.

Si la probabilidad de aceptar el lote es alta por esta prueba y sin embargo la probabilidad de que haya + de dos chips defectuosos: LA PRUEBA NO ES VALIDA PARA MIS INTERESES.

¿Cuán consideramos 1 probabilidad alta o baja?

—> 0'2 o menos: Probabilidad baja.

—> 0'2 o más: " alta.

EXPERIMENTOS:

Obtener al azar 1 chips del lote y comprobar si es o no defectuoso.
Posibles resultados: defectuoso o no.

Tamaño población pequeño: probabilidad no es independiente.
↳ Probabilidad del resultado no es cte.

V.a X - nº de chips defectuosos cuando se eligen los chips al azar.

V.a. $X \sim H(N=25, M=?, n=3)$ —> nº de chips defectuosos en el lote.

* Si la prob. q. obtengo es ≥6 —> no me interesa.

(M>5) Porq. me interesa q. la prueba sea válida.

$$P[X \leq 1] = \sum_{x=0} \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{M}{0}\binom{25-M}{3}}{\binom{25}{3}} + \frac{\binom{M}{1}\binom{25-M}{2}}{\binom{25}{3}}$$

¿Qué es lo que nosotros podemos alterar para cambiar la muestra?

—> Puedes alterar el tamaño de la muestra, así como la condición a cambio de la cual tu aceptas ese lote.